



# Is dit toeval?

Lesbrief



# Is dit toeval?

Lesbrief



# Colofon

© Platform Taalgericht Vakonderwijs,  
Stichting leerplanontwikkeling (SLO), Enschede, 2009

Alle rechten voorbehouden. Mits de bron wordt vermeld is het toegestaan om zonder voorafgaande toestemming van de uitgever deze uitgave geheel of gedeeltelijk te kopiëren dan wel op andere wijze te verveelvoudigen.

## Auteurs

Monica Wijers (Freudenthal Instituut, Utrecht), Berend Stellingwerf (Etoc, Groningen), Marco Swaen (Caland Lyceum, Amsterdam)

## In opdracht

Ministerie van OCW

**Vormgeving:** Mooi Bedacht, Almelo

**Productie:** Axis, Enschede

**Druk:** Netzodruk, Enschede

## In samenwerking met:

- Freudenthal Instituut, Centrum voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen (Flsme), Universiteit Utrecht
- Expertisecentrum Taal, Onderwijs en Communicatie (ETOC), Rijksuniversiteit Groningen
- Calandlyceum, Amsterdam
- Domein Onderwijs en Opvoeding, Hogeschool van Amsterdam
- Instituut voor Taalonderzoek en Taalonderwijs Anderstaligen (ITTA), Universiteit van Amsterdam

## Besteladres

SLO, Stichting Leerplanontwikkeling

Afdeling Verkoop

Postbus 2041, 7500 CA Enschede

Telefoon (053) 4840 305

Internet: [www.slo.nl](http://www.slo.nl) / [www.taalgerichtvakonderwijs.nl](http://www.taalgerichtvakonderwijs.nl)

E-mail: [verkoop@slo.nl](mailto:verkoop@slo.nl)

AN 5.3792.233

[www.taalgerichtvakonderwijs.nl](http://www.taalgerichtvakonderwijs.nl)

# Inhoud

Inleiding 4

## Hoofdstuk 1

Voorkennis 5

- 1.1 Opdrachten 5
- Opdracht 1 5
- Opdracht 2 5
- Opdracht 3: Denken, Delen, Uitwisselen 6
- Tenslotte 6

## Hoofdstuk 2

Inleiding op hypothesetoetsing 7

- 2.1 Inleiding 7
- 2.2 Opdracht 7
- Opdracht: Is dat toeval? 7

## Hoofdstuk 3

Het toetsen van de hypothesen 8

- 3.1 Introductie 8
- 3.2 Opdrachten 8
- Opdracht 1: Boek en begrippenlijst 8
- Opdracht 2: Begrippenlijst ordenen en vergelijken 8

## Hoofdstuk 4

Verwerkingsopdrachten 9

- 4.1 Opdrachten 9
- Opdracht 1: Invulteksten 9
- Opdracht 2: Conclusies trekken 10
- Opdracht 3: Leestekst 10
- Opdracht 4: Bloggen 10

# Inleiding

Het onderwerp van deze lessenserie is het toetsen van hypothesen, een onderwerp uit de statistiek. Voor je daarmee aan de slag kunt is het verstandig je voorkennis op het gebied van statistiek, in het bijzonder over kansverdelingen, op te halen. De lesbrief begint daarmee, vervolgens wordt het onderwerp hypothesetoetsing ingeleid en ga je daarmee aan het werk. Een deel van de opgaven maak je uit je wiskundeboek. In deze lesbrief staan aanvullende opdrachten bij het boek.

De lesbrief bestaat uit de volgende onderdelen:

- voorkennisopdrachten
- inleiding op het toetsen van hypothesen
- het toetsen van hypothesen
- verwerkingsopdrachten

## Doelen

Je kent de belangrijkste begrippen rond hypothesetoetsing en kansrekening. Daarnaast kun je ze goed en duidelijk gebruiken in een tekst waarin je een leeftijdsgeenoot er iets over uitlegt.

# Voorkennis

## Tijdsduur

1 lesuur

## Werkvorm

Opdracht 1: individueel

Opdracht 2: individueel

Opdracht 3: eerst individueel, dan in tweetallen, dan hele klas

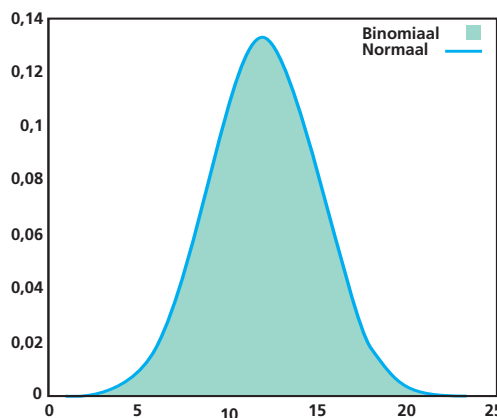
## Materiaal

- De opdrachten in deze lesbrief.
- Je wiskundeboek en schrift met de hoofdstukken over kansverdelingen die al hebt gedaan als naslagwerk.

## 1.1 Opdrachten

Stel, je hebt een bedrag van 100 euro en je kunt meedoen met een gokspel, waarbij jij drie maal mag gooien met een zuivere munt. Voor iedere worp moet je de helft van je geld inzetten. Je wilt het bedrag van je inzet als je kop gooit en je bent het bedrag van je inzet kwijt bij munt

Hoeveel kun je winnen en verliezen en hoe groot is de kans dat je wilt of verliest? Neem je de gok?



In dit voorbeeld wordt gebruik gemaakt van kansrekening. Kansrekening speelt in de statistiek een belangrijke rol.

Voor het toetsen van hypothesen moet je goed begrijpen wat een kansverdeling is. In het bijzonder moet je weten wat de normale en binomiale verdeling zijn. Je moet daar een

goed begrip van hebben en je moet er vlot en goed mee kunnen werken. In de volgende drie opdrachten haal je die voorkennis op. Je werkt afwisselend individueel in een kleine groep of met de hele klas. Je kunt je boek en je schrift gebruiken als naslagwerk.

## Opdracht 1

- Leg uit wat bedoeld wordt met het volgende: het gewicht van kilopakken suiker is normaal verdeeld met  $\mu=1000$  gram en  $\sigma=8$  gram. Teken er een plaatje bij.
- Bereken de kans dat het gewicht van een pak suiker meer dan 50 gram afwijkt van 1000 gram.
- Vergelijk in een kleine groep jullie antwoorden op a en b. Let daarbij ook op of de formulering correct en begrijpelijk is. Zorg dat je allemaal goed begrijpt hoe je met de normale verdeling moet werken.

## Opdracht 2

- Geef een voorbeeld van een binomiaal verdeelde stochast (toevalsvariabele).
- Wat is bij een binomiale verdeling de betekenis van de parameters  $p$  en  $n$ ?

De volgende opgaven kun je extra doen om in de stof te komen.

- Je gooit 50 keer met een munt. Hoe groot is de kans dat je precies even veel kop als munt gooit?
- Bij een reclameactie krijg je bij de kassa elke keer een kraslootje. De kans dat op het kraslootje een ster staat is 10%. Heb je drie sterren dan win je een gratis filmkaartje. Je doet 7 keer boodschappen, hoe groot is de kans dat je één gratis filmkaartje wint?
- Hoe groot is de kans dat je minstens één keer een 6 gooit, als je 6 keer gooit met een dobbelsteen.
- Hoe groot is de kans dat je 4 keer met een dobbelsteen moet gooien om één keer een zes te krijgen.

## Opdracht 3

### Denken, Delen, Uitwisselen

#### Stap 1: individueel

*Bedenk zelf een opgave over een binomiaal of normaal verdeelde stochast (toevalsvariabele).* Denk bijvoorbeeld aan spelletjes of loterijen, of onderzoeken, kortom situaties waarin het toeval een rol speelt.

**Voorbeeld van een binomiaal verdeelde toevalsvariabele.**

**We gooien 4 keer met een (eerlijke) dobbelsteen. We kunnen 0, 1, 2, 3 of 4 keer een 6 gooien. Hoe groot is de kans dat we van de 4 worpen 1 keer een 6 gooien?**

**Voorbeeld van een normaal verdeelde toevalsvariabele.**

**Intelligentie is normaal verdeeld met een gemiddelde van 100 en een standaarddeviatie van 20. Hoe groot is de kans dat een willekeurige voorbijganger op straat een intelligentie heeft van 130?**

Bedenk een originele opgave. Over deze vraag denk je eerst zelf in stilte na. Je noteert alvast ideeën voor een opgave. Je docent geeft aan hoe lang je hiervoor tijd hebt.

#### Stap 2: twee- of drietallen

Op een teken van je docent ga je met een of twee medeleerling je ideeën bespreken. Zorg ervoor dat jullie allemaal aan bod komen binnen de tijd die je krijgt. Kies het idee dat jullie het beste vinden, en werk dat uit tot een opgave. Gebruik de goede termen en notaties. Maak ook een uitwerking van de opgave. Dit is de stap delen.

#### Stap 3: hele klas

Je docent vraagt een aantal leerlingen in de klas naar hun opgaven. Ook vraagt hij jullie om te reageren op de opgaven van anderen. Dit is de stap **uitwisselen**.

## Stap 4

### Individueel (huiswerk)

Kies een van de besproken opgaven uit (niet je eigen) en maak die. Vraag als je klaar bent de uitwerking aan de ontwerper van de opdracht en kijk je eigen werk na.

### Ten slotte

Advies: als je moeite had met de vorige opgaven zoek dan in je boek het hoofdstuk over de normale en binomiale verdeling op. Bestudeer de samenvatting en maak enkele (herhalings)opgaven.

# Inleiding op hypothesetoetsing

**Tijdsduur**

25 minuten.

**Werkvorm**

Gesprek met hele klas.

**Materiaal**

De inleiding hieronder aangevuld met actuele situaties die de docent omschrijft. De geformuleerde doelen

dan krijg je het gevoel dat het geen toeval meer is. Helemaal zeker kun je dat echter niet weten. Hypothesetoetsing is een techniek die je helpt om in zulke situaties een verstandige beslissing te nemen. Die techniek ga je in de komende lessen leren.

## 2.1 Inleiding

Sommige dingen gebeuren bij toeval. Soms gebeuren er dingen die heel onwaarschijnlijk lijken.

Bijvoorbeeld:

- bij de trekking voor een voetbaltoernooi spelen de sterkste clubs allemaal in dezelfde poule;
- de hoofdprijs van de postcodeloterij en van de staatsloterij vallen op hetzelfde adres;
- het percentage leerlingen dat een N-profiel kiest op jouw school is twee keer zo hoog als het landelijk gemiddelde;
- in de helft van de pakken pannenkoekenmix die je kocht voor de pupillen van de hockeyclub, zit minder dan de aangegeven 500 gram.

## 2.2 Opdracht

**Opdracht 1: Is dat toeval?**

Bespreek bij elk van de genoemde voorbeelden (of de voorbeelden die je docent geeft) de volgende vragen: hoe kan dit? Wat kun je voor conclusie trekken? Betekent dit dat er iets oneerlijks aan de hand is, of is er gewoon sprake van toeval?

Je kunt in bovenstaande voorbeelden uitrekenen hoe groot de kans is dat het gebeurt. Is die kans erg klein,





# Het toetsen van hypothesen

## 3.1 Introductie

Hypothesetoetsing wordt vaak lastig gevonden. Het uitrekenen van kansen bij een kansverdeling valt vaak wel mee, de lastige zaken zijn:

- het vertalen van het probleem naar het wiskundig model en terug:
  - het opstellen van hypothesen;
  - het bepalen welke variabele de stochast (=toevalsvariabele) is;
  - het trekken van de juiste conclusie.
- het houden van overzicht:
  - waar gaat het eigenlijk om bij hypothesetoetsing?
  - wat ben ik aan het doen en waarom?

Het overzicht bewaar je beter als je de vaktermen op dit gebied goed leert hanteren, het gaat met name om de begrippen: nulhypothese, alternatieve hypothese, eenzijdig toetsen, tweezijdig toetsen en significantieniveau en de werkwoorden die daarbij passen.

Probeer daarom deze begrippen voor jezelf en voor je medeleerlingen in begrijpelijke taal uit te leggen en gebruik ze zorgvuldig bij het maken van de opdrachten uit het boek. Besteed daarbij aandacht aan het correct -in wiskundetaal- formuleren van je conclusies.

### Tijdsduur

3 - 6 lesuren, met huiswerk.

### Werkvorm

Individueel of in tweetallen.

### Materiaal

- De opdrachten hieronder
- Je wiskundeboek

## 3.2 Opdrachten

In de inleiding op hypothesetoetsing (deel 2) heb je geleerd dat je bij het toetsen van hypothesen kansrekening gebruikt om na te gaan hoe waarschijnlijk het is dat een bepaalde uitkomst of resultaat op toeval berust. Je werkt nu het hoofdstuk over het toetsen van hypothesen uit je wiskundeboek door. Terwijl je dat doet houd je een begrippenlijst bij. Het gaat daarbij niet alleen om losse begrippen maar ook om de (verschillende) werkwoorden die bij deze begrippen gebruikt kunnen worden.

### Opdracht 1 Boek en begrippenlijst

- Werk uit je wiskundeboek het hoofdstuk (of de hoofdstukken) over het toetsen van hypothesen door. Overleg met je docent over de planning.
- Tijdens het werken aan de opdrachten uit je boek kom je een groot aantal nieuwe begrippen tegen. Deze begrippen noteer je in een begrippenlijst.

Als je klaar bent met het hoofdstuk is je begrippenlijst ook af en maak je in tweetallen opdracht 2.

### Opdracht 2 Begrippenlijst ordenen en vergelijken

Neem samen met een klasgenoot jullie begrippenlijsten door. Ga van elk begrip na of je het kent, kunt omschrijven of dat het onbekend is. Zoek de betekenis van onbekende begrippen op in je boek, of bespreek ze in de klas. Maak tenslotte een gezamenlijke begrippenlijst. Deze begrippenlijst heb je nodig bij de verwerkingsopdrachten in deel vier.



# Verwerkingsopdrachten

**Tijdsduur**

2 lesuren

**Werkvorm**

Opdracht 1: individueel

Opdracht 2: individueel

Opdracht 3: individueel, dan in tweetallen, dan klassikaal

Opdracht 4: individueel

**Materiaal**

- de opdrachten in deze lesbrief
- je begrippenlijst als naslagwerk
- je wiskundeboek en -schrift als naslagwerk

## 4.1 Opdrachten

### Opdracht 1 Invulteksten

Je ziet hieronder en op de volgende pagina een vraag- en-antwoord rond hypothesetoetsen. Uit beide teksten is een aantal woorden en symbolen weggelaten. Vul de juiste termen en symbolen in. Gebruik je begrippenlijst.

Beste Emre,  
De ..... zijn:  
 $H_0$ : .....  
 $H_1$ :  $\mu$  ..... 180 cm (omdat het ..... in de ..... een stuk te ..... is).  
Van belang is het aantal mannen ( $n$ ) in de .....  
Uitgaande van ..... is de gemiddelde lengte  $X_{\text{gemiddeld}}$  in een groep van  $n$  mannen ..... verdeeld met  $\mu_{X_{\text{gemiddeld}}} =$  ..... cm en  $\sigma_{X_{\text{gemiddeld}}} =$  ..... cm.  
Je kunt nu met ..... op je GR uitrekenen wat de kans is dat een groep van  $n$  mannen een gemiddelde lengte van ..... cm of meer heeft. Als die kans onder het ..... ligt, dan wordt  $H_0$  .....  
In dat geval kun je concluderen dat .....  
Karel

Beste Karel,  
Ik heb het volgende probleem,  
Het gaat over een opgave:  
De lengte van mannen is ..... verdeeld, ..... is 180 cm met een ..... van 10 cm. Bij een ..... blijkt dat de lengte van mannen ..... 189 cm is.  
Nu moet ik ..... of het ..... bijgesteld zou moeten worden, en zodoende bekijken of dit resultaat ..... is. Ik heb geen idee waar ik moet beginnen.  
Ik hoop dat jullie kunnen helpen,  
Gr Emre

## Opdracht 2

### Conclusies trekken

Nadat je hebt uitgerekend of je de nulhypothese wel of niet moet verwerpen, moet je als laatste de juiste conclusie trekken. Het goed onder woorden brengen van deze conclusie is niet altijd eenvoudig. In deze opdracht oefen je daar mee.

#### Koekjes

De fabrikant Corona maakt Madeleine koekjes verpakt per 300g. Om duidelijk te maken aan de consument dat er daadwerkelijk 300g koekjes zit in elke verpakking, voert men regelmatig steekproeven uit. De volgende hypothesen worden daarbij gehanteerd:  $H_0: \mu > 300g$  en  $H_a: \mu < 300g$  ze worden getoetst met  $\alpha = 0,05$ . Na berekening blijkt de overschrijdingskans  $p = 0,0515$  te zijn.

Wat is de conclusie? Vul de zinnen aan.

De \_\_\_\_\_-hypothese \_\_\_\_\_ wordt \_\_\_\_\_, omdat de overschrijdingskans \_\_\_\_\_ is dan het \_\_\_\_\_.

De fabrikant concludeert op grond van deze \_\_\_\_\_ dat \_\_\_\_\_ en zal \_\_\_\_\_.

## Opdracht 3

### Leestekst

Lees de tekst '1 op 1000' (op werkblad 3). Deze tekst is ook te vinden op:

<http://www.uk.rug.nl/archief/jaargang32/22/07a.htm>.

#### a. Individueel:

Noteer kort op welke plaatsen in dit artikel sprake is van het toetsen van hypothesen.

#### b. Uitwisselen in tweetallen:

Leg de voorbeelden die je hebt gevonden bij elkaar en noteer voor alle gevallen die je samen hebt gevonden hypothesen die getoetst worden.

#### c. Eindproduct individueel:

Kies één van de voorbeelden (zie b.) en werk dit uit tot een voorbeeld van hypothesetoetsing. Beschrijf stap voor stap hoe je die zou uitvoeren en wat het resultaat is. Dat kun je bijvoorbeeld doen door er een opgave van te maken (zoals die in je boek staan), daar hoort dan natuurlijk een uitwerking bij!

#### d. Uitwisseling klassikaal:

Presenteer je opgave aan de klas. Vraag om reacties. Laat je klasgenoten de opgave maken en kijk het samen na. Gebruik de resultaten om je opgave (en je uitwerking) te verbeteren.

## Opdracht 4

### Bloggen

Mila schreef het volgende in een blog:

---

Hallo! Ik moet morgen wiskunde a12 examen vwo doen.. en ik mis een boek wat ik vandaag eigenlijk wel had willen bekijken 😊

Ik hoop dat iemand me nog kan helpen vóór morgen  
Mijn vraag:

Hoe werk je nou precies een som uit waarin je hypothesen toetst?

Je begint met het opstellen van  $H_0$  en  $H_1$ , en dan..? Wat is precies de volgorde en hoe moet het precies omschreven worden? >>>

Ik schrijf volgens mij namelijk alles verkeerd op en daardoor kom ik zelf in de war en heb ik het uiteindelijk fout ☹

Oja, ik heb ook nog een vraag over het verwerpen of niet verwerpen. Weet iemand de 'regel' daarvoor? Als je bijv.  $p=0,7$  tegen  $p \leq$  (kleiner of gelijk aan)  $0,7$  toetst. Je significantieniveau is  $0,05$  en het antwoord dat je eruit krijgt is  $0,04$ . Verwerp je dan de hypothese of niet? Is er een soort schema voor wanneer je het verwerpt wanneer je wat precies toetst?

Heel erg bedankt als iemand me kan helpen.....!!

a. Individueel:

Help Mila en schrijf voor haar een goede uitleg over hypothesetoetsen. Verwerk daarin zoveel mogelijk de begrippen uit je begrippenlijst.

Eisen aan je eindproduct:

- 1 A4.
- Lopende zinnen, geen spelfouten.
- Gebruik van de juiste begrippen (zie begrippenlijst).
- Een schema om hypothesetoetsing uit te voeren.

Je mag voorbeelden gebruiken!

b. Uitwisselen in subgroepen:

- Lees de blog van je medegroepsleden.
- Geef opbouwende kritiek op de blogs. Benoem goede en minder goede onderdelen. Doe voorstellen voor verbetering.
- Verwerk de blogs tot een nieuwe blog, waarin jullie opmerkingen zijn verwerkt. Lever deze bij de leerkracht in.



