

7. Vwo wiskunde C

Dit hoofdstuk beschrijft de verschillen tussen het huidige en nieuwe examenprogramma voor wiskunde C vwo. Na een tabel met een opsomming van de (sub)domeinen van wiskunde C (huidig en nieuw) wordt beschreven wat behoort tot het CE en tot het SE waarna uitvoerig per (sub)domein wordt ingegaan op de aard en inhoud van de veranderingen. Het hoofdstuk sluit af met enkele examenopdrachten die de vernieuwingen illustreren.

Examenprogramma vwo C 2007	Examenprogramma vwo C 2015
Domein A Vaardigheden	Domein A Vaardigheden
A1 Informatievaardigheden	A1 Algemene vaardigheden
A2 Onderzoeksvaardigheden	A2 Profielspecifieke vaardigheden
A3 Technisch-instrumentele vaardigheden	A3 Wiskundige vaardigheden
A4 Oriëntatie op studie en beroep	
A5 Algebraïsche vaardigheden	
Domein Bg Functies en grafieken	Domein B Algebra en tellen
Bg1 Standaardfuncties	B1 Rekenen en algebra
Bg2 Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden	B2 Telproblemen*
Domein Cg Discrete analyse	Domein C Verbanden
Cg1 Veranderingen	Domein D Veranderingen
Cg2 Rijen en recurrente betrekkingen	
Domein Eg Combinatoriek en kansrekening	Domein E Statistiek (SE)
Eg1 Combinatoriek	E1 Probleemstelling en onderzoeksontwerp
Eg2 Kansen	E2 Visualisatie van data
Eg3 Rekenen met kansen	E3 Kwantificering
Eg4 Speciale discrete verdelingen	E4 Kansbegrip
Domein Ea Grafen en matrices	E5 Kansverdelingen
Ea1 Grafen	E6 Statistiek en ICT
Ea2 Matrices	
Domein Fa Statistiek en kansrekening	Domein F Logisch redeneren
Fa1 Populatie en steekproef	Domein G Vorm en ruimte
Fa2 Ordenen, verwerken en samenvatten van statistische gegevens	
Fa3 Kansverdelingen	
Domein G Keuzeonderwerpen	Domein H Keuzeonderwerpen (SE)

*In het centraal examen van 2018 en 2019 zullen GEEN vragen gesteld worden over subdomein B2. Het onderwerp mag wel worden getoetst in het SE, maar dat is niet verplicht. Vanaf het CE van 2020 kunnen er wel vragen worden gesteld over subdomein B2.

7.1 Het centraal examen vwo wiskunde C

Het centraal examen bij het nieuwe programma heeft betrekking op de domeinen B, C, D, F en G in combinatie met de vaardigheden uit domein A.

7.2 Het schoolexamen vwo wiskunde C

Het schoolexamen heeft tenminste betrekking op domein A, E en H.

Conform het examenbeleid wordt ongeveer 40% van de studielast aangewezen voor toetsing in uitsluitend het schoolexamen. Bij wiskunde C vwo betreft dit domein E (Statistiek en kansrekening) en domein H (Keuzeonderwerpen).

7.3 Veranderingen bij de invoering

Binnen het nieuwe wiskunde C nemen contexten die passen in het C&M profiel een belangrijke plaats in. De nadruk ligt minder op het reproduceren van technieken en meer op de functie, de cultuurhistorische rol en de waarde van wiskunde in onze maatschappij.

Hieronder de belangrijkste veranderingen, voor de details: zie de nieuwe syllabus (CvTE, 2014e).

Domein A Vaardigheden (2007) → Domein A Vaardigheden (2015)

De subdomeinen A1, A2, A3, A4 en A5 zijn geherdefinieerd in A1 (Algemene vaardigheden), A2 (Profiel specifieke vaardigheden) en A3 (Wiskundige vaardigheden), waarbij de door CTWO (2007) genoemde, wiskundige denkactiviteiten expliciet genoemd worden in subdomein A3.

Het 2015 programma heeft een nieuw domein B Algebra en tellen

Het bestaat uit de subdomeinen:

- Subdomein B1: Rekenen en algebra
 - In dit subdomein gaat het om basisberekeningen met getallen en variabelen (rekenregels, inclusief die van machten en wortels, werken met haakjes, expressies herleiden, verhoudingen, percentages en breuken, werken met grootheden, samengestelde grootheden en maatsystemen en eenheden omrekenen).
- Subdomein B2: Telproblemen
 - Dit het subdomein Eg1 Combinatoriek uit het 2007 programma; er hebben herformuleringen plaatsgevonden maar inhoudelijk is er nauwelijks iets veranderd.

Domein B Functies en grafieken (2007) → Domein C Verbanden (2015)

- Dit nieuwe domein C Verbanden heeft veel overeenkomsten met het oude domein B Functies en grafieken maar dit alles in een minder formeel en abstract kader en meer gericht op het toepassen van wiskundige vaardigheden in diverse toepassingen en situaties.
- Het begrip functie wordt nog wel genoemd in de globale eindtermen maar niet in de specificaties. Daar wordt, evenals in de centrale examens, alleen nog maar gesproken over Verbanden.
- In de specificaties worden de verbanden die gekend moeten worden nu expliciet genoemd bij de parate kennis evenals de karakteristieke eigenschappen ervan.
- De begrippen domein en bereik, nulpunt, extreem, verticale – en horizontale asymptoot hoeven niet gekend te worden. Wel moeten leerlingen de activiteit, om asymptotisch gedrag te onderzoeken, beheersen.

- Lineaire vergelijkingen moeten in een probleemsituatie algebraïsch kunnen worden opgelost; alle andere vergelijkingen, evenals ongelijkheden, mogen worden opgelost met de grafische rekenmachine of met (verschillende manieren van) representaties.
- Nieuw zijn eindtermen met:
 - de regel $\sqrt[p]{x} = x^{\frac{1}{p}}$,
 - recht evenredig $y = a \cdot x$ en omgekeerd evenredig $y = \frac{a}{x}$,
 - bij de formules $y = a \cdot x + b$, $y = b \cdot g^x$, $y = a \cdot x^p$ en $y = {}^s \log(x)$ de variabele x uitdrukken in y ,
 - periodieke verschijnselen beschrijven met periode, amplitude en evenwichtswaarde,
 - lineair interpoleren en extrapoleren en trends,
 - verdubbelingstijd en halveringstijd.

Domein Cg Discrete analyse (2007) → Domein D Veranderingen

Van het domein Cg Discrete analyse is vervallen:

- veranderingen beschrijven met differenties zoals bijvoorbeeld Δx ,
- toename diagrammen,
- differentiequotienten (zowel berekenen als gebruiken en interpreteren (2007 specificaties 8.6 t/m 8.9),
- hellinggrafiek (8.10 en 8.11),
- helling numeriek benaderen.

Verder is een tweetal termen uit het 2007 SE subdomein Cg2 Rijen en recurrente betrekkingen ondergebracht bij dit CE domein D.

Het nieuwe domein D Veranderingen heeft een veel minder formeel karakter met hierin:

- hellingen grafisch kunnen benaderen,
- stijgend, dalend en of stijging/daling toenemend of afnemend is,
- veranderingsgedrag van verbanden herkennen en beschrijven met behulp van hun grafieken, tabellen en formules,
- de gemiddelde verandering op een interval kunnen berekenen,
- termen kunnen berekenen van een rij getallen die gegeven is door een directe of een recursieve formule,
- een directe formule of recursieve formule kunnen opstellen van een rij getallen waarvan gegeven is dat deze hoort bij een lineair of exponentieel verband.

Het domein Ea Grafen en matrices (2007, alleen SE) is geheel komen te vervallen

Domein Eg Combinatoriek en kansrekening:

De kansrekening (subdomeinen Eg2 t/m Eg4, 2007) is in het programma van 2015 geen onderdeel meer van het CE. In het nieuwe examenprogramma is het nieuwe subdomein E4 Kansbegrip wel verplicht binnen het SE.

Domein Fa Statistiek en kansrekening (2007) → Domein E Statistiek en kansrekening (2015)
 Statistiek en kansrekening (subdomeinen Fa1 t/m Fa4) is geen onderdeel meer van het CE. In het nieuwe examenprogramma is het wel verplicht binnen het SE deel. De opzet van de statistiek is grondig gewijzigd (gebaseerd op de empirische cyclus: data verzamelen - data verwerken - conclusies trekken en het werken met grote datasets) maar onderwerpen als kansverdelingen (binomiaal en normaal) en hypothese toetsen zijn gebleven. De syllabuscommissie heeft zich niet gebogen over de specificaties bij dit domein omdat het een SE onderdeel betreft. In het ontwerpprogramma van cTWO (2012) bestaat Domein E Statistiek en kansrekening uit de subdomeinen:

- Subdomein E1: Probleemstelling en onderzoeksontwerp
- Subdomein E2: Visualisatie van data
- Subdomein E3: Kwantificering
- Subdomein E4: Kansbegrip
- Subdomein E5: Kansverdelingen
- Subdomein E6: Statistiek met ICT

Bij deze subdomeinen heeft cTWO ook specificaties voorgesteld. Deze zullen een richtlijn zijn voor de uitgevers van leermiddelen en de handreikingen van SLO die in 2015 zullen verschijnen.

Verder heeft het 2015 programma van wiskunde C twee geheel nieuwe CE domeinen:

- Domein F Logisch redeneren
 - De globale eindterm luidt: De kandidaat kan logische redeneringen analyseren op correct gebruik.
 - In dit domein worden logisch-wiskundige aspecten gekoppeld aan correctheid van redeneringen en het trekken van conclusies zoals in het maatschappelijk debat.
 - Enkele logische symbolen moeten worden gekend evenals de begrippen contradictie en paradox. Deze moeten worden herkend en beschreven kunnen worden.
 - Er moet gewerkt kunnen worden met Venndiagrammen.
 - Hoe de globale eindterm verder is uitgewerkt: zie de nieuwe syllabus (CvTE, 2014e).
- Domein G Vorm en ruimte
 - De globale eindterm luidt: *De kandidaat kan van een ruimtelijk object aanzichten en perspectieftekeningen maken, er berekeningen aan uitvoeren en basis daarvan conclusies trekken over dit object.*
 - Belangrijk is de hieraan toegevoegde opmerking:
 - *Bij het hanteren van de begrippen en methoden uit dit domein worden de probleemsituaties bij voorkeur gekozen in beeldende, architectonische en kunsthistorische context.*
 - In de specificaties blijkt dat de oppervlakte van rechthoek, driehoek en cirkel berekend moet kunnen worden en ook de inhoud van balk, prisma, cilinder, piramide en kegel.
 - Er moet met schaalvergroting gerekend kunnen worden.
 - Er moeten éénpuntperspectief- en tweepuntperspectieftekeningen van een balk gemaakt kunnen worden.
 - Er moeten aanzichten gemaakt kunnen worden van balk, piramide en prisma.
 - Er moet gewerkt kunnen worden met symmetrie en gelijkvormigheid.
 - Hoe de globale eindterm verder is uitgewerkt: zie de nieuwe syllabus (CvTE, 2014).

Verder wordt in het nieuwe programma aandacht besteed aan wiskundige denkactiviteiten.

7.4 Voorbeelden uit pilotexamens vwo wiskunde C

De opgave Schaatskunst (pilotexamen vwo wiskunde C 2012, 1e tijdvak) is een voorbeeldopgave bij het nieuwe domein F (Logisch redeneren)

Schaatskunst

In 2010 stond in NRC Handelsblad een klein artikel dat hiernaast is afgedrukt.

In deze opgave bekijken we de discussie tussen de meisjes. Daarvoor modelleren we deze discussie:
Er zijn twee vriendinnen, vriendin 1 en vriendin 2, die de schrijfster van het artikel tegenkomen.

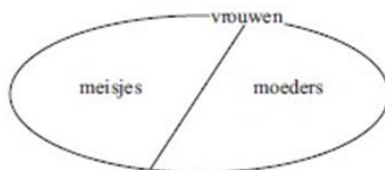
Citaat 1: vriendin 1 vraagt aan de schrijfster: "Ben jij een moeder?"

Citaat 2: vriendin 2 zegt: "Ze is een moeder omdat ze geen bochtjes kan."

Citaat 3: vriendin 1 zegt: "Dat kun je pas zeggen als je alle moeders kent en wanneer alle moeders geen bochtjes kunnen."

Citaat 4: vriendin 1 zegt bovendien: "Dat kun je niet zeggen want wij zijn meisjes en kunnen ook geen bochtjes."

Uit het artikel volgt dat er op de schaatsbaan blijkbaar maar twee verschillende soorten vrouwen zijn: moeders en meisjes.
Dat zie je hieronder in een Venndiagram weergegeven.



We gaan er steeds van uit dat iedere vrouw kan schaatsen.

ik@nrc.nl

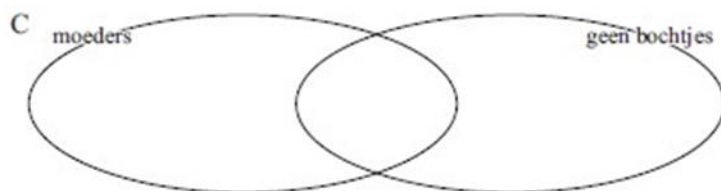
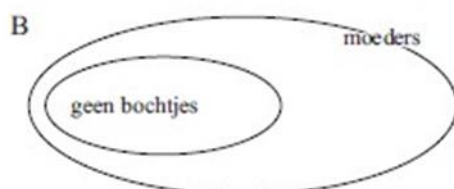
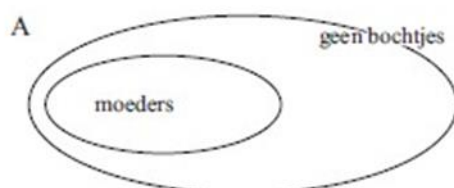
Schaatskunst

Het schaatsseizoen is weer begonnen. Rechttuit gaat wel, bochtjes oefen ik ieder jaar alsof het voor het eerst is. Ik help een meisje met haar veters. Als we elkaar weer tegenkomen vraagt ze of ik een meisje ben of moeder. Haar vriendinnetje onderbreekt haar: "Ze is een moeder. Ze kan wel schaatsen, maar geen bochtjes, net als mijn moeder." Het is even stil. Dan zegt de ander: "Dat kan je pas zeggen wanneer je alle moeders kent en wanneer alle moeders wel kunnen schaatsen, maar geen bochtjes. En trouwens wij zijn meisjes en kunnen ook geen bochtjes". Vriendinnetje zucht: "Jij maakt ook altijd alles ingewikkeld!"

MARGREET VAN SCHIE

2p 20 Geef de redenering van citaat 2 in de vorm "Als ... dan ..."

Hieronder staan 3 verschillende Venndiagrammen. Een daarvan past bij citaat 2.



- 2p 21 Welke van de Venndiagrammen A, B of C past bij citaat 2? Licht je antwoord toe.

In citaat 4 gaat vriendin 1 tegen de uitspraak van citaat 2 in.

- 2p 22 Toon aan dat dit argument van citaat 4 voldoende is om de uitspraak van vriendin 2 in citaat 2 te weerleggen.

We kijken nu naar citaat 3 van vriendin 1. Stel dat de volgende bewering geldt: "Alle moeders kunnen geen bochtjes."

- 3p 23 Formuleer deze bewering weer in een 'Als ... dan ...'-vorm en onderzoek of deze bewering de uitspraak van citaat 2 bevestigt.

De opgave Gelijke volumes (pilotexamen 2013, 1e tijdvak) is een illustratie van een opgave bij het nieuwe domein G (Vorm en ruimte) maar ook met vragen bij domein C (Verbanden), onder andere herleiden van een formule als voorbeeld van een algebraïsche activiteit.

Gelijke volumes

foto



Op de foto zie je een kunstwerk bestaande uit een zuil, een kubus en een plaat. Het heet *Drie gelijke volumes*, omdat de drie objecten dezelfde inhoud hebben.

De lengte, hoogte en breedte van de kubus zijn 1 m. De zuil is 4 m hoog en de lengte en breedte van de zuil zijn aan elkaar gelijk.

- 10 Bereken de lengte en de breedte van de zuil.

Op de uitwerkbijlage zie je een grotere foto van het kunstwerk.

- 11 Geef op de uitwerkbijlage op de zuil aan op welke hoogte de foto genomen werd en bereken deze hoogte. Rond je antwoord af op gehele dm.

Op de uitwerkbijlage bij vraag 12 moet de plaat in perspectief getekend worden. De afmetingen van de plaat zijn 200 bij 200 bij 25 cm. Als begin is een deel van de onderkant van de plaat in perspectief getekend, namelijk vierkant $ABCD$ van 100 bij 100 cm.

- 12 Maak een perspectieftekening van de hele plaat op de uitwerkbijlage, zodanig dat punt C het hoekpunt van de onderkant van de plaat is dat rechtsachter ligt.

Het kunstwerk bestaat uit 3 voorwerpen (plaat, kubus, zuil) met elk een vierkant grondvlak en een inhoud van 1 m^3 . Het is ook mogelijk om een hele serie van zulke voorwerpen te maken.

Stel, we noemen de plaat voorwerp nummer 1 en we maken van elk volgend voorwerp in de serie de hoogte steeds 25 cm hoger. Het grondvlak moet steeds vierkant zijn en de inhoud steeds 1 m^3 . Voor de hoogte van een voorwerp geldt de volgende formule: $h = 25n$. Hierbij is h de hoogte in cm en n het nummer van het voorwerp. De kubus is nu het voorwerp met nummer 4.

- 13 Bereken welk nummer de zuil heeft in deze serie.

Noem de lengte in cm van een zijde van het vierkante grondvlak van een voorwerp uit deze serie l . Omdat de inhoud van elk voorwerp uit deze serie gelijk is aan 1 m^3 , dus gelijk is aan $1\,000\,000 \text{ cm}^3$, geldt nu het volgende:

$$l^2 \cdot h = 1\,000\,000$$

Uitgaande van deze formule kan men een formule opstellen waarin l wordt uitgedrukt in n .

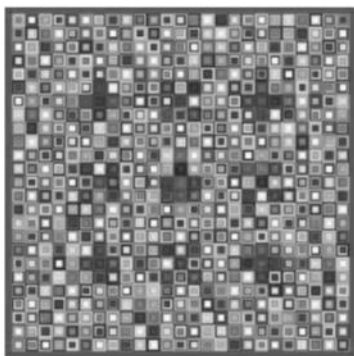
- 14 Stel deze formule op.

De opgave Vierkanten (pilotexamen 2013, 1e tijdvak) is een illustratie van een opgave bij het subdomeinen B2 (Telproblemen) en domein D (Veranderingen).

Vierkanten

Op de foto hieronder zie je een kunstwerk van Margaret Kepner, dat opgebouwd is uit 25 bij 25 vierkanten. Elk van deze vierkanten bestaat uit een klein vierkant en drie vierkante 'randen' eromheen. Elk van deze vier onderdelen kan wit, lichtgrijs, middelgrijs, donkergrijs of zwart zijn. In figuur 1 en figuur 2 zie je hier voorbeelden van. De vier onderdelen van het vierkant van figuur 1 zijn van buiten naar binnen respectievelijk donkergrijs, zwart, wit en lichtgrijs. Eenzelfde kleur kan ook meer keren voorkomen: zie figuur 2. En verder voor de duidelijkheid: twee onderdelen naast elkaar mogen ook dezelfde kleur hebben.

foto



figuur 1



figuur 2



- 18 Bereken hoeveel verschillende vierkanten er op deze manier gemaakt kunnen worden.

De vierkanten stellen getallen voor. De kleuren corresponderen met cijfers: wit = 0, lichtgrijs = 1, middelgrijs = 2, donkergrijs = 3 en zwart = 4. Het cijfer van de buitenste rand moet vermenigvuldigd worden met 125, dat van de rand daarbinnen met 25, dat van de binnenste rand met 5 en dat van het binnenste vierkant met 1. In figuur 1 is dus het getal $3 \times 125 + 4 \times 25 + 0 \times 5 + 1 \times 1 = 476$ weergegeven.

Figuur 2 bevat behalve de kleuren zwart en wit ook nog de kleur lichtgrijs.

- 19 Bereken op dezelfde manier welk getal in figuur 2 afgebeeld is.

In het kunstwerk komen alle getallen van 0 tot en met 624 precies één keer voor. Deze getallen zijn zó gerangschikt dat, als je alle getallen in een rij bij elkaar optelt, dit steeds hetzelfde getal oplevert: het **magische getal**. Ook als je alle getallen in een kolom bij elkaar optelt, komt ditzelfde magische getal er uit. In figuur 3 zie je hiervan een voorbeeld voor een kunstwerk van 3 bij 3 getallen: het magische getal is hier 12.

figuur 3

5	0	7
6	4	2
1	8	3

Het magische getal van het kunstwerk kan men berekenen door alle getallen van 0 tot en met 624 bij elkaar op te tellen en de uitkomst vervolgens te delen door het aantal rijen: elke rij moet immers bij optellen hetzelfde getal opleveren.

Voor een rij getallen zoals in dit kunstwerk geldt de volgende formule:

$$\text{som} = 0,5 \cdot \text{aantal termen} \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$$

- 20 Bereken met behulp van de bovenstaande formule het magische getal van het kunstwerk.

In het algemeen geldt voor een kunstwerk van p bij p getallen waarin elk getal van 0 tot en met $p^2 - 1$ precies één keer voorkomt, de volgende formule voor het magische getal:

$$\text{magisch getal} = 0,5 \cdot p \cdot (p^2 - 1)$$

Deze formule voor het magische getal is af te leiden door gebruik te maken van het volgende:

- Voor de som van alle getallen in het kunstwerk geldt de formule $\text{som} = 0,5 \cdot \text{aantal termen} \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$
- Het aantal termen is p^2 (dit is namelijk gelijk aan het aantal getallen in een kunstwerk van p bij p getallen)
- De eerste term is 0, de laatste term is $p^2 - 1$
- Het magische getal is gelijk aan de som van alle getallen in het kunstwerk gedeeld door het aantal rijen.

- 21 Laat zien hoe je met behulp van het bovenstaande de formule $\text{magisch getal} = 0,5 \cdot p \cdot (p^2 - 1)$ kunt afleiden.

Voor een expositie wil een andere kunstenaar een werk maken vergelijkbaar met dat van Margaret Kepner van hierboven. Dit kunstwerk is een stuk kleiner en moet opgebouwd zijn uit p bij p vierkantjes die verschillende getallen voorstellen. De kunstenaar wil weten bij welke waarden van p het magische getal van zo'n kunstwerk ligt tussen 500 en 1000.

- 22 Bereken voor welke waarden van p dat het geval is.