# Talen naar rekenen en rekenen op taal

## Rekentaal bevordert het oplossen van non-routine rekenopgaven en vice versa

**Auteur:** ***Marjolein Kool***

“Leer kinderen problemen oplossen.” Dat is een belangrijk doel van het onderwijs van de toekomst, zowel binnen als buiten de rekenles. Als het gaat om het oplossen van non-routine rekenopgaven (opgaven waarbij kinderen zelf een oplossingsmanier construeren) is het van belang dat leerlingen daarover met elkaar in gesprek gaan. Dat vereist een adequate rekentaal waarmee ze hun rekenideeën kunnen verwoorden en die van anderen kunnen begrijpen. Leerlingen kunnen die rekentaal verwerven door met elkaar in gesprek te gaan over het oplossen van non-routine rekenopgaven. Dit lijkt een vicieuze cirkel, maar leerkrachten die zich ervan bewust zijn dat hun leerlingen  tijdens het uitwisselen van oplossingsmanieren aan een dubbel doel werken, kunnen zorgen voor niveauverhoging, zowel in rekentaal als in probleemoplossende vaardigheden. Door feedback te geven op zowel het taal¬ge¬bruik van de leerlingen als hun oplossingsmanieren, creëren ze een win-win-onderwijs-situatie.

## ‘Echte’ rekenwiskundige problemen

Welke vaardigheden moeten onze leerlingen op school verwerven om te kunnen functioneren in de zich voortdurend ontwikkelende digitaliserende samenleving en het werkveld van de toekomst? Bij alle antwoorden die op deze vraag gegeven worden klinkt herhaaldelijk het doel: Leer leerlingen problemen oplossen! Het werken aan rekenwiskundige problemen kan bijdragen aan de ontwikkeling van een probleemoplossende attitude die leerlingen nu en in de toekomst op allerlei gebieden van pas kan komen. Door te werken aan rekenopgaven leren leerlingen denkfouten ontmaskeren, risico’s beoordelen, alternatieven bedenken en weloverwogen beslissingen te nemen. Ze ontwikkelen zich tot flexibele denkers met een breed repertoire aan technieken en perspectieven waarmee ze om kunnen gaan met nieuwe problemen en situaties (Schoenfeld, 1992).

Werken aan echte rekenwiskundige problemen ontwikkelt een manier van denken die in de digitaliserende en globaliserende samenleving van groot belang is, ook voor degenen die in hun verdere leven weinig met wiskunde te maken zullen krijgen (Drijvers, 2011).

Wat verstaan we onder ‘echte rekenwiskundige problemen’? Volgens Schoenfeld (2007) betreft het rekenwiskundige opgaven waarvoor leerlingen geen kant-en-klare routinematige, geoefende oplossingsmanier bezitten. De rekenaar moet een ‘nieuwe’ oplossingsmanier construeren uit de kennis en vaardigheden die hij tot zijn beschikking heeft. Dat is veel gevraagd. De rekenaar moet wiskundige concepten en structuren ontdekken die in de opgave verborgen zitten. Hij moet kunnen analyseren, modeleren en niet-algoritmisch kunnen denken (Stein, Schwan, Henningsen, & Silver, 2000; Kolovou & Van den Heuvel-Panhuizen, 2009). Deze ‘echte rekenwiskundige problemen’ worden ook wel breinbrekers en hersenkrakers genoemd. Deze namen suggereren dat ze alleen bestemd zouden zijn voor de sterke rekenaars, maar problemen oplossen is iets dat alle leerlingen moeten leren. In dit artikel worden ze ‘non-routine rekenopgaven’ genoemd. Die aanduiding geeft aan dat het gaat om rekenopgaven waarbij een rekenaar niet meteen de opgave herkent en onmiddellijk met een pasklare strategie aan de slag kan gaan, maar eerst moet bedenken met welke middelen hij het probleem te lijf kan gaan.

*“Leerkrachten die zich ervan bewust zijn dat hun leerlingen tijdens het uitwisselen van oplossingsmanieren aan een dubbel doel werken, kunnen zorgen voor niveauverhoging, zowel in rekentaal als in probleemoplossende vaardigheden.”*

## Taal en denken

Non-routine rekenopgaven oplossen vereist denkwerk. Volgens Vygotsky (1986) is taal onmisbaar bij het verrichten van denkwerk. Hij onderscheidt twee ‘denkfuncties’ voor taal. De individuele functie als middel om zelf te kunnen denken en eigen gedachten te kunnen vormen en ordenen, en de sociale functie als middel om te communiceren over die gedachten. Deze twee functies staan niet los van elkaar. Ons denken wordt beïnvloed door het praten met en luisteren naar anderen. Als je met iemand praat, toets je wat je hoort aan je eigen gedachten en je stelt ze al dan niet bij. Wie niet praat over zijn gedachten komt op een gegeven moment niet verder in de ontwikkeling van zijn gedachten. Kennisontwikkeling is vaak het resultaat van doelgerichte interactie met anderen (Van Eerde, 2009).

Het lijkt alsof we de sociale functie van taal als middel om te communiceren over ons denken wat uit het oog zijn verloren als het gaat om rekenonderwijs op de basisschool. Kinderen werken individueel in boeken of op tablets, kijken hun antwoorden na, ontvangen instructie en gaan weer verder. Om te oefenen en rekenroutine op te bouwen kan dit waardevol zijn, maar juist als we onze leerlingen willen voorbereiden op de 21e eeuw willen we meer dan routine en vaardigheid. We willen dat kinderen ook leren denken en problemen leren oplossen.

Om ze dat te leren is het belangrijk dat ze de kans krijgen om te communiceren over hun denken. Hierdoor kunnen ze hun gedachten en ideeën met die van anderen vergelijken en deze evalueren, verdedigen, onderbouwen, bijstellen, uitdiepen, verbreden, enzovoort. Discussie, interactie en argumentatie vormen de basis voor logisch redeneren en reflectie (Van Eerde, 2009). Daarvoor is een gezamenlijke rekentaal onontbeerlijk. Het is van belang dat leerkrachten aandacht schenken aan de ontwikkeling van zo'n rekentaal.

## Hoe kunnen leerlingen hun rekentaal ontwikkelen?

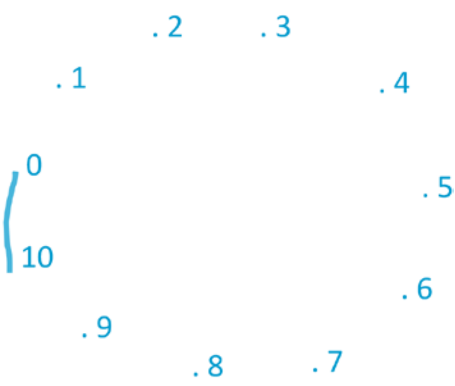
In de rekenles werken aan een gezamenlijke rekentaal is niet nieuw. In de kerndoelen van het basisonderwijs staat bij kerndoel 23 dat leerlingen wiskundetaal leren gebruiken (Greven & Letschert, 2006). In de kerndoelen voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs staat het nog preciezer beschreven. Kerndoel 19: "De leerling leert passende wiskundetaal gebruiken voor het ordenen van het eigen denken en voor uitleg aan anderen, en leert de wiskundetaal van anderen begrijpen." (Van der Molen, 2006). Hier zien we de dubbelfunctie van rekentaal die Vygotsky beschreef: rekentaal om het eigen denken te ordenen en rekentaal om te communiceren met anderen.

In de rekentaal, die leerlingen in de rekenles tegenkomen, onderscheidt men drie taalsoorten:

— Rekenvaktaal: met woorden en uitdrukkingen als factor, noemer, verdubbelen, 'Hoeveel per vierkante meter?' en 'Hoe vaak gaat 15 op de 90?'. Hierbij horen ook symbolen als plus, min, haakjes, procenten, en voorstellingen als schema's, tabellen, grafieken en diagrammen, en opdrachten voor de rekenmachine (Greven & Letschert, 2006);
— Schooltaal met woorden als: verband, weergeven, concluderen, geleidelijk, kenmerk, aspect en oorzaak;
— Alledaagse taal: met woorden als winkel, kopen, betalen, afwegen en prijskaartje.

*"Door te werken aan rekenopgaven leren leerlingen denkfouten ontmaskeren, risico's beoordelen, alternatieven bedenken en weloverwogen beslissingen te nemen."*

De taalsoorten kunnen soms met elkaar in botsing komen. Een alledaags woord kan in de rekenles ineens een andere betekenis (erbij) krijgen. Zo kreeg een leerling uit groep 3 de opdracht om een groot getal op te schrijven. Hij noteerde een enorme 1 op zijn blaadje! Een ander kind moest een hoog getal opnoemen en zei: "Dat is de temperatuur op een flatgebouw." Voor veel kinderen is 'volume' de knop op de afstandsbediening van de televisie en niet de inhoud van een wiskundig object. Dergelijke 'botsingen tussen taalsoorten' worden in de rekenles vaak niet gesignaleerd. Dat komt onder andere omdat leerlingen zich vaak niet bewust zijn dat ze met een taalprobleem te maken hebben. De leerling die een grote 1 noteerde, dacht dat hij de opdracht goed begrepen had, terwijl dat niet het geval was. Het komt ook voor dat leerlingen zich wel realiseren dat ze bijvoorbeeld de betekenis van een woord niet kennen, maar niet om hulp (durven te) vragen. Ze lezen er omheen en hopen dat de betekenis uit de context zal blijken. Daar komt nog bij dat leerkrachten vaak niet doorhebben dat taal de oorzaak van een probleem is. Ze denken een rekenprobleem te zien, terwijl het eigenlijk om een woordenschatprobleem gaat. Zie bijvoorbeeld figuur 1.




Figuur 1. *Deze leerling kreeg de opdracht de getallen van 0 tot 10 te verbinden. Is hier sprake van een taal- of van een rekenprobleem?*

Het is belangrijk dat leerkrachten zich bewust worden van de grote rol die taal in de rekenles speelt, en mogelijkheden in handen krijgen om de taal in de rekenles te verbeteren. De navolgende adviezen kunnen daaraan bijdragen:

— **Geef taal een belangrijke plaats in de rekenles en zorg voor interactie**. Van den Boer (2003) ontdekte dat leraren in multiculturele klassen geneigd zijn om taal te versimpelen of taalgebruik te vermijden, waardoor hun leerlingen niet leerden hun gedachten te uiten en te toetsen aan die van anderen en ze dus niet verder kwamen met hun rekengedachten. Stimuleer leerlingen om rekentaal te gebruiken en probeer dit taalgebruik al doende te verbeteren. Dit kan bijvoorbeeld door ze officiële vaktermen aan te reiken. Vervang ‘rondje’ door ‘cirkel’ en ‘keer doen’ door ‘vermenigvuldigen’. Overigens ontdekte Menne (2001) dat zwakke rekenaars in de rekenles juist houvast hadden aan informele uitdrukkingen als ‘verliefde harten’, ‘vriendjes van 100’, ‘tweelingen’, enzovoort. Kinderen kunnen beter betekenisvolle informele woorden gebruiken dan onbegrepen officiële rekentermen. *Sla de brug naar de vakterminologie als de tijd daar rijp voor is.* Een bekend didactisch model om de (vak)woordenschat te ontwikkelen is de viertakt van Verhallen (Van den Nulft & Verhallen, 2001). De stappen voorkennis activeren, uitleggen, herhalen en controleren kunnen voor concrete rekentermen goed gebruikt worden, de vraag is echter of het model ook bij abstracte begrippen als bijvoorbeeld verhouding, dichtheid en gemiddelde een rol kan spelen. Wellicht is revoicing een goed alternatief. In de volgende paragraaf wordt deze aanpak toegelicht.

— **Geef kinderen niet alleen de gelegenheid om te luisteren en te lezen, maar laat ze ook rekentaal spreken en schrijven**. Vooral bij actief taalgebruik kun je als leerkracht ontdekken hoe het met de rekentaal gesteld is en kun je die waar nodig verbeteren, bijsturen en ontwikkelen. Leer kinderen hun uitwerking zo goed mogelijk te noteren, tussenstappen te laten zien en toon waardering voor die tussenstappen (Buijs, 2008). Laat leerlingen ervaren dat het bij het oplossen van rekenopgaven niet alleen om het antwoord gaat, maar ook om het proces dat het antwoord heeft opgeleverd (Boaler, 2015).

*“Het lijkt alsof we de sociale functie van taal als middel om te communiceren over ons denken wat uit het oog zijn verloren als het gaat om rekenonderwijs op de basisschool.”*

— **Stel open vragen die hogere cognitieve taalfuncties uitlokken en het denken stimuleren.** Stel dus niet alleen vragen die om rapporteren vragen, als: wie, wat, waar, wanneer?, maar ook vragen die redeneren uitlokken als: Stel je eens voor dat…? Hoe kan het…? Waarom is het zo…? (Appel, Kuiken & Vermeer, 1997).

— **Leer kinderen dat bij rekentaal ook tekeningen, schema’s, modellen, structuren, getallenlijnen en pijlen horen.** Ook daarmee kun je communiceren over je gedachten. Visualisaties kunnen gegevens ordenen en samenvatten (Van der Molen, 2006).

— **Stel eisen aan de rekentaal van kinderen.** Vraag door, ook al denk je te weten wat de leerling bedoelt. Hierdoor kom je erachter of de leerling daadwerkelijk op het goede spoor zit. Controleer of alle klasgenoten het verhaal van de leerling konden volgen. Probeer de rekentaal van de leerlingen te parafraseren, herformuleren en verbeteren, maar vergeet daarbij niet de pogingen van de leerlingen te waarderen en hen te complimenteren. *Wijs niet alleen op wat fout gaat, maar ook op wat goed gaat.*

Leerlingen ontwikkelen hun rekentaal door deze te gebruiken onder leiding van een expert die zich bewust is van dit talige doel, die alert is op wát de leerlingen zeggen en hóe ze het zeggen. Samen spreken over het oplossen van een non-routine rekenopgave biedt een goede gelegenheid. Het oplossen van non-routine rekenopgaven kan zowel doel als middel zijn. Door hun rekentaal te ontwikkelen kunnen leerlingen met en van elkaar leren hoe ze problemen kunnen oplossen. Door gezamenlijk rekenopgaven op te lossen en daarover te spreken onder leiding van de leerkracht kan de rekentaal verder ontwikkeld worden. Het volgende voorbeeld laat zien hoe dat kan.

## Een voorbeeld van het ontwikkelen van rekentaal

Jo Nelissen (2001) voert met leerlingen van groep 6 een rekengesprek over een vraagstuk en laat zien hoe leerlingen hierbij hun rekentaal ontwikkelen. Het vraagstuk luidt: *Hoeveel kinderen wegen samen evenveel als een ijsbeer?* Eerst discussiëren de leerlingen over het gewicht van de ijsbeer. Met elkaar besluiten de kinderen voor 400 kg te kiezen. Dan volgt de vraag hoe zwaar een kind is. De leerlingen bedenken dat het uitmaakt of je een baby neemt of een kind uit groep 8. Ze kiezen voor een kind uit groep 6 want ze zitten zelf in groep 6. Maar ook in groep 6 zijn niet alle kinderen even zwaar. Ze besluiten voor het gewicht van Mieke te kiezen. Waarom Mieke? “Nou, er zijn kinderen die ongeveer

*“Stimuleer leerlingen om rekentaal te gebruiken en probeer dit taalgebruik al doende te verbeteren.”*

even zwaar zijn als Mieke, sommige zijn lichter en andere zwaarder.” Mieke wordt “een soort voorbeeldkind” genoemd. De leerkracht sluit hierop aan door het begrip ‘gemiddeld kind’ te introduceren: “Het gewicht van Mieke is gemiddeld voor deze groep 6.” Natuurlijk valt er nog veel meer over het begrip ‘gemiddelde’ te vertellen, maar voorlopig heeft de groep met elkaar een eerste betekenis geconstrueerd. Jo Nelissen noemt dit revoicing. De leerkracht gaat daarbij uit van de betekenis die de kinderen met elkaar geconstrueerd hebben. Hij introduceert een adequate term en werkt zo aan hun rekentaal. Dit voorbeeld maakt duidelijk dat de rekentaal zich kan ontwikkelen bij het bespreken van een rekenopgave mits de leerkracht zich bewust is van dit doel. Met gerichte taalsteun en feedback is niveauverhoging mogelijk (Van Eerde, 2009).

## De rol van rekentaal bij het oplossen van non-routine rekenopgaven

Bij het oplossen van een non-routine rekenopgave speelt taal - vaktaal, schooltaal, alledaagse taal - op verschillende momenten in het oplossingsproces een rol. Taal is om te beginnen nodig om de opgave betekenis te geven. Wat is precies het probleem? Op welke vraag moeten we straks een antwoord kunnen geven? Wat weten we al en wat moeten we te weten komen? Vervolgens volgt er een vertaalslag van de probleemsituatie naar de onderliggende wiskundige structuur, het zogenoemde mathematiseren. Het ‘alledaagse’ probleem moet een wiskundeprobleem worden. Denk bijvoorbeeld aan het ijsbeervraagstuk. Als we willen weten hoeveel kinderen even zwaar zijn als een ijsbeer, moet het gewicht van een ijsbeer gedeeld worden door het gewicht van een kind. Uiteindelijk vinden de leerlingen als onderliggende wiskundige structuur van de opgave, de deling 400 : 40. In dit voorbeeld is de opgavestructuur in één enkelvoudige rekenbewerking te vangen. Maar bij non-routine rekenopgaven is dat vaak niet mogelijk. In dat geval moeten leerlingen op een andere manier grip krijgen op de wiskundige structuur van de opgave. Tijdens het mathematiseren van een opgave kan taal weer een belangrijke rol spelen. Zie bijvoorbeeld de rekenopgave in figuur 2.


Figuur 2. *Rekenopgave uit ‘Alles Telt’ deel 4A.*

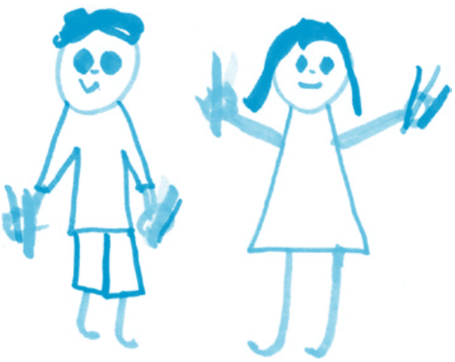
Deze opgave is voor de meeste leerlingen in groep 4 geen routine opgave. Ze zullen de opgave niet in een somformule (‘kale som’) kunnen vertalen. Maar er zijn wel andere manieren waarop ze grip kunnen krijgen op de wiskundige structuur van het probleem. Ze kunnen de situatie naspelen met potloden en vervolgens al doende ontdekken hoe de verdeling kan zijn. Ze kunnen ook beginnen met een min of meer willekeurige gok. Stel bijvoorbeeld dat het meisje vier potloden heeft, dan heeft de jongen er zes (want hij heeft er twee meer dan het meisje), maar dat maakt samen tien potloden terwijl er 14 verdeeld moeten worden. Geef iedereen er nog twee bij en het probleem is opgelost.

De leerlingen kunnen ook een systematisch lijstje maken van alle mogelijke verdelingen tot ze er een gevonden hebben die aan de eisen voldoet.

| Meisje | Jongen | Verschil |
|---|---|---|
| 1 | 13 | 12 |
| 2 | 12 | 10 |
| 3 | 11 | 8 |
| 4 | 10 | 6 |
| 5 | 9 | 4 |
| **6** | **8** | **2** |

Veel leerkrachten adviseren de leerlingen om een tekening van het probleem te maken. Dat kan een waardevol advies zijn, mits de leerlingen geleerd hebben dat ze in zo’n tekening alle relevante gegevens – niet meer en niet minder - in de juiste onderlinge samenhang schematisch moeten weergeven. In figuur 3 is te zien hoe een leerling heeft geprobeerd het potlodenprobleem te tekenen. Deze leerling heeft vermoedelijk wel begrepen om welke rekenvraag het hier gaat, maar is er niet in geslaagd de opgave te mathematiseren. De tekening biedt geen houvast bij het oplossen van de opgave omdat de wiskundige structuur niet wordt weergegeven.

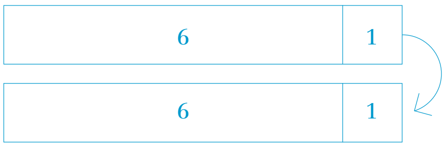
*“Leerlingen ontwikkelen hun rekentaal door deze te gebruiken onder leiding van een expert die zich bewust is van dit talige doel, die alert is op wát de leerlingen zeggen en hóe ze het zeggen.”*



Figuur 3. *Een leerling tekent de opgave van het verdelen van de potloden (zie figuur 2). Deze tekening is geen schematische visualisatie en biedt geen houvast bij het oplossen van het vraagstuk.*

Er waren ook leerlingen die de opgave met 14 streepjes weergaven:

Vervolgens legden ze hun hand ergens tussen de streepjes en telden links en rechts hoe dat uitpakte. Ze vonden uiteindelijk de oplossing door hun hand een paar streepjes op te schuiven. Dit is een schematische weergave van de opgavestructuur (mathematisering) die leidde tot een adequate oplossingsmanier.




Figuur 4. *Een schematische weergave van de opgavestructuur van het potlodenprobleem (zie figuur 2), die vermoedelijk wél houvast biedt bij de oplossing van opgave.*

Figuur 4 laat nog een andere schematische weergave van de rekenopgave zien. Eerst wordt 14 in twee gelijke delen verdeeld, en vervolgens wordt één potlood van het ene deel naar het andere deel overgeplaatst, wat ook de verdeling 6 – 8 oplevert.

Leerlingen die met elkaar in gesprek gingen over de aanpak van het potlodenprobleem ontdekten met elkaar dat de weergave met de streepjes effectiever was dan de gedetailleerde tekening van de jongen en het meisje. Door over hun aanpakken te praten deden ze een belangrijke ontdekking over de wijze waarop je een rekenopgave kunt mathematiseren: Teken schematisch en laat overbodige details achterwege.

Volgens Anton Boonen (2015) kan een accurate visueel-schematische representatie van de probleemstructuur van een rekenopgave de kans op een correcte aanpak en uitkomst met maar liefst een factor zes vergroten. Daarbij is het van belang dat de visualisatie daadwerkelijk de wiskundige structuur bloot legt. Een tekening met allerlei overbodige en afleidende details verkleint juist de kans op een goede oplossing van de rekenopgave.

## Andere manieren van mathematiseren

Het mathematiseren van een opgave is altijd nodig om het vraagstuk te kunnen oplossen. Soms lukt dat met een ‘kale som’, soms werkt een schematische visualisatie. Een tekening is echter niet altijd mogelijk of handig. In sommige gevallen werkt een visualisatie zelfs averechts. Neem bijvoorbeeld de volgende rekenopgave: ‘Een emmer water van 300 en een even grote emmer water van 600 worden bij elkaar gegoten. Wat is de temperatuur van het mengsel?’

De weergave van deze rekenopgave in figuur 5 representeert de relevante gegevens in de juiste onderlinge samenhang. Dat ziet er hoopvol uit, maar toch wordt door deze weergave een verkeerde aanpak uitgelokt.


Figuur 5. *Schematische weergave van de opgave waarin twee emmers met water van verschillende temperatuur bij elkaar worden gegoten. Deze visualisatie ontlokt een verkeerde rekenaanpak.*

*“Het valt niet mee om leerlingen te leren denken, maar gelukkig kunnen ze veel leren van en met elkaar.”*

De probleemstructuur wordt met deze tekening niet blootgelegd. De tekening suggereert immers alsof je het probleem kunt oplossen door de twee temperaturen bij elkaar op te tellen. Dit is uiteraard niet het geval, maar een betere visualisatie is in dit geval niet mogelijk. Bij deze rekenopgave is het raadzaam om niet te tekenen, maar aan vergelijkbare rekenopgaven te denken. Bijvoorbeeld: Wat gebeurt er met de temperatuur als ik twee emmers van 300 bij elkaar giet? Dan blijft de temperatuur gelijk. En als ik een emmer van 300 en een van 320 meng? Door vergelijkbare vragen te stellen met temperaturen die leerlingen aan het denken zetten kunnen ze uiteindelijk ontdekken dat de nieuwe temperatuur precies midden tussen de twee oude waarden in zit.

Het voorgaande voorbeeld maakt duidelijk dat het mathematiseren van een rekenopgave niet eenvoudig is. Leerlingen moeten de beschikking krijgen over algemene aanpakken als: probeer de somformule te noteren, probeer een schematische tekening te maken, maar ook: gebruik materialen, doe een beredeneerde gok, maak een lijstje, denk aan vergelijkbare opgaven of zoek een patroon. Deze aanpakken noemt men in de wiskunde heuristieken. Het zijn zoekmethodes om je denken op gang te helpen bij het oplossen van onbekende rekenproblemen (Meijerink, 2008). Ze bieden geen garantie dat je de oplossing ook daadwerkelijk zult vinden, maar door systematisch aan de slag te gaan (in plaats van alleen maar te ‘gissen en missen’) wordt de kans op succes wel groter.

## Fouten voorkomen of ze benutten

Er zijn leerkrachten die het mathematiseren, het gebruik van heuristieken, uit de weg gaan. Zij leren hun leerlingen voor het oplossen van rekenopgaven de zogenoemde sleutelwoordentruc: Zoek een sleutelwoord in de opgave en leidt daaruit af hoe je moet rekenen. Zij verbinden bijvoorbeeld het sleutelwoord ‘meer’ met optellen. Dat klopt inderdaad in de volgende opgave: ‘Jan had eerst tien knikkers. Nu heeft hij er drie meer. Hoeveel heeft hij er nu?’ Het gaat hier om de optelling 10 + 3. Maar de sleutelwoordentruc kan ook mis gaan. ‘Jan heeft tien knikkers. Hij heeft er drie meer dan Piet. Hoeveel knikkers heeft Piet?’ Hier gaat het om 10 – 3 en dus niet om 10 + 3. Het zoeken naar sleutelwoorden verleidt kinderen tot lukraak woorden en getallen kiezen en daarmee onmiddellijk aan het rekenen te slaan. Het is dus niet verstandig om leerlingen de sleutelwoordenaanpak te leren omdat de fase van het mathematiseren - het blootleggen van de wiskundige probleemstructuur – hierdoor wordt overgeslagen. Bekend is het experiment met de rekenopgave over de kapitein: ‘Op een boot bevinden zich 26 schapen en 10 geiten. Hoe oud is de kapitein?’ Een groot deel van de kinderen ging onmiddellijk rekenen en gaf 36 als antwoord (Treffers & De Goeij, 2006).

Voor non-routine rekenopgaven bestaan geen snelle trucjes. Die vragen om denkwerk. Het valt niet mee om leerlingen te leren denken, maar gelukkig kunnen ze veel leren van en met elkaar. Rekengesprekken over rekengedachten onder leiding van de leerkracht kunnen waardevol zijn. Die gedachten hoeven niet allemaal rechtstreeks naar de oplossing van de rekenopgave te leiden. Ook als leerlingen met elkaar in gesprek gaan over hun fouten brengt dat rekengedachten op gang (Boaler, 2014).

In figuur 6 is een opgave uit De wereld in getallen, deel 7a afgebeeld. Tevens staat er een uitwerking van een leerling bij. Deze is niet correct. Vraag leerlingen wat ze van de uitwerking vinden. De oplossingsmanier begint goed, maar op een gegeven moment is het toch misgegaan. Waar? En waarom? Nadenken over een fout, deze eventueel herstellen en nadenken over de oorzaak van de fout kan het begrip van de rekenopgave verdiepen.


12 naast elkaar
6 voor elkaar
2 op elkaar
20

Figuur 6. *Rekenopgave uit ‘De wereld in getallen’ deel 7a, met een onjuiste oplossingsmanier.*

## Tot slot

Laat leerlingen op gezette tijden met elkaar aan de slag gaan met non-routine rekenopgaven. Ze hebben daar taal bij nodig. Taal om het probleem betekenis te geven en om het probleem te vertalen in een wiskundige structuur, taal om het probleem op te lossen en om gezamenlijk terug te blikken op het antwoord en het oplossingsproces. Een leraar die leerlingen de ruimte geeft en uitdaagt om hun gedachten omtrent een rekenprobleem te verwoorden, toe te lichten, te onderbouwen, bij te stellen of te verdedigen geeft hen de kans om probleemoplossende vaardigheden te ontwikkelen. Tegelijkertijd krijgt hij in beeld hoe het met hun rekentaal gesteld is en kan hij door middel van doorvragen, parafraseren, samenvatten, verhelderen, accenten leggen, tekenen, enzovoort werken aan de ontwikkeling van die rekentaal. Daarmee slaat hij twee vliegen in één klap!

“Denken en met elkaar communiceren over dat denken.” Vygotsky heeft het honderd jaar geleden al bedacht, maar wat mij betreft is dit de kern van het onderwijs van de toekomst.

***Marjolein Kool is hogeschoolhoofddocent rekenen-wiskunde-didactiek aan pabo Instituut Theo Thijssen van de Hogeschool Utrecht.***

## Literatuur:

Appel, R., Kuiken, F. & Vermeer, A. (1997). *Handboek Nederlands als tweede taal in het basisonderwijs.* Meulenhoff.

Boaler, J. (2014). *The mathematics of hope: moving from performance to learning in mathematics classrooms.* Verkregen op 16-5-2016 van https://bhi61nm2cr3mkdgk1dtaov18-wpengine.netdna-ssl.com/wp-content/uploads/Mathematics-of-Hope-Paper2.pdf

Boaler, J. (2015). *Mathematical mindsets.* San Francisco.

Boonen, A. (2015). *Comprehend, visualize & calculate. Solving mathematical word problems in contemporary math education.* Proefschrift Vrije Universiteit Amsterdam.

Buijs, K. (2008). *Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen.* Utrecht: Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education (diss.).

Drijvers, P. (2011). Wat bedoelen ze toch met… denkactiviteiten? N*ieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 31(2)*, 38-41.

Greven, J. & Letschert, J. (2006). *Kerndoelen primair onderwijs*. Den Haag: Ministerie van OCW.

Kolovou, A., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2009). Hoeveel probleemoplossingsopgaven zitten er in onze reken-wiskundemethoden? In M. van Zanten (Ed.), *Doorgaande ontwikkelingen rekenen-wiskunde.* Universiteit Utrecht, Freudenthal Instituut.

Menne, J. (2001). *Met sprongen vooruit.* Utrecht: CD-β-Press / Freudenthal Instituut (diss.).
Commissie Meijerink, Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen (2008). Over de drempels met rekenen. Consolideren, onderhouden, gebruiken en verdiepen. Enschede: SLO.

Nelissen, J.M.C. (2001). Interactie: een vakpsychologische analyse. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskunde onderwijs, 20(4)*, 3-14.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. H. (2007). Method. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 69–110). Greenwich, CT: information Age Publishing.

Stein, M.K., Schwan, S., Henningsen, A. & Silver, E. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction.* New York: Teachers College Press.

Treffers, A. & De Goeij, E. (2006). Anders naar kinderen kijken. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 25(3)*, 11-14.

Van den Boer, C. (2003). *Als je begrijpt wat ik bedoel. Een zoektocht naar verklaringen voor achterblijvende prestaties van allochtone leerlingen in het wiskundeonderwijs*. Utrecht: Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education (diss.).

Van den Nulft, D. & Verhallen, M. (2001). *Met woorden in de weer*. Bussum: Coutinho.

Van der Molen, H. (2006). *Karakteristieken en kerndoelen voor de Onderbouw.* Zwolle.

Van Eerde, D.. (2009). Rekenen-wiskunde en taal: een didactisch duo. Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 28(3), 19-32.

Vygotsky, L.S. (1986). *Thought and language.* Newly revised. Cambridge, MA: MIT Press. (Oorspronkelijk gepubliceerd in het Russisch in 1934.)